

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 01/03/11

- (1) Sia $K = K(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ si ponga

$$T[f](x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) d\mu(y) .$$

- (a) Provare che, per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$, $T[f] \in L^2(\mathbb{R})$ e che vale

$$\|T[f]\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|K\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} .$$

- (b) Provare che l'insieme

$$\mathcal{T} = \{T[f] \mid f \in L^2(\mathbb{R}), \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1\} .$$

è relativamente compatto in $L^2(\mathbb{R})$.

- (2) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Sia $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ una successione di insiemi misurabili tale che

$$\sum_n \mu(E_n) < \infty .$$

Provare che, posto $E = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ vale

$$\mu(E) = 0 .$$

- (3) Sia $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ e si definisca per induzione la successione $\{f_k\}$ di funzioni su \mathbb{R}^2 nel seguente modo

$$f_1 = \chi_B, f_{k+1} = \chi_B * f_k .$$

Calcolare, per ogni k , $\int f_k$ e determinare qual è l'insieme di livello $\{f_k > 0\}$.